مذكرة الهندسة

متوسطات المثلث - التباين

الفصل الدراسى الأُول ٢٠٢٠

متوسطات المثلث

- متوسطات المثلث
- المثلث المتساوى الساقين
- نظريات المثلث المتساوى الساقين
- نتائج نظريات المثلث المتساوى الساقين

متباينة المثلث

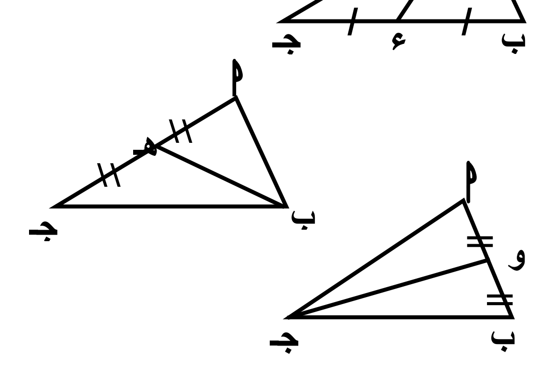
- مفهوم التباين
- المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث
- المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث
- متباينة المثلث

متوسطات المثلث

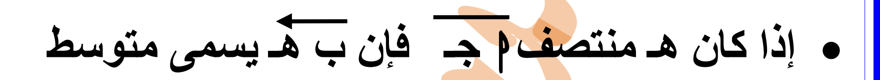
تعـــريف

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أى رأس من رؤوس المثلث الى


منتصف الضلع المقابل لهذه الرأس



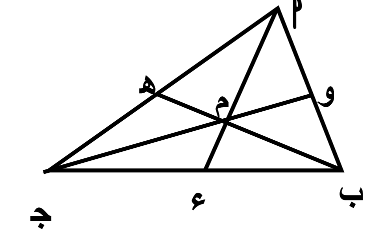

• إذا كان ء منتصف $\overline{ب جـ}$ فان $\overleftarrow{أ ء}$ يسمى متوسط


• إذا كان هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ فإن $\overleftarrow{ب هـ}$ يسمى متوسط

• إذا كان و منتصف $\overline{أ ب}$ فإن $\overleftarrow{جـ و}$ (متوسط)

نظرية (١)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعا فى نقطة واحدة



$\overleftarrow{أ ء} \cap \overleftarrow{ب هـ} \cap \overleftarrow{جـ و} = \{ م \}$

نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

أى أن: إذا كان $\overleftarrow{أ ء}$ متوسط فى Δ أ ب جـ

أ م : م ء = ٢ : ١

أ م = ٢ م ء = $\frac{٢}{٣}$ أ ء

أ ء = $\frac{٣}{٢}$ أ م = ٣ م ء

لاحظ أن :

إذا كان $\overline{أ ء}$ متوسط طوله ٦سم ، م نقطة تلاقى متوسطات المثلث

فإن أ م = ٤ سم ، م ء = ٢سم

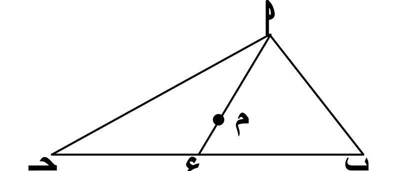
لاحظ أن:

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

حقيقة :-

النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

مثـــال : من الشكل المقابل إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فأكمل



(١) أم : م ء = ٢ : ١

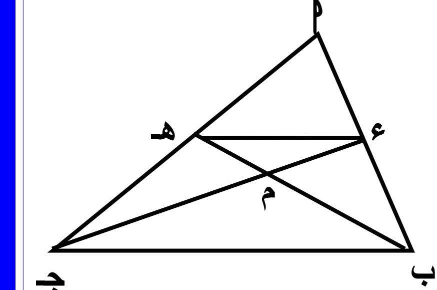
(٢) أء : أم = ٣ : ٢

(٣) إذا كان: أء = ٩ سم فإن أم = ٩ × $\frac{٢}{٣}$ = ٦سم

(٤) م ء : أ ء = ١ : ٣

مثـــال : إذا كان ء ، هـ منتصفا أب ، أجـ ، أب ∩ أجـ = { م } فأكمل





(١) إذا كان ء جـ = ١٢ سم فإن ء م = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

(٢) إذا كان ء م = ٥ فإن م جـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم

(٣) إذا كان م جـ = ١٢ سم فإن ء جـ = $\frac{٣}{٢}$ × ١٢ = ١٨ سم

(٤) إذا كان ب م = ٤ سم فإن م هـ = ٢ سم ، ب هـ = ٦ سم

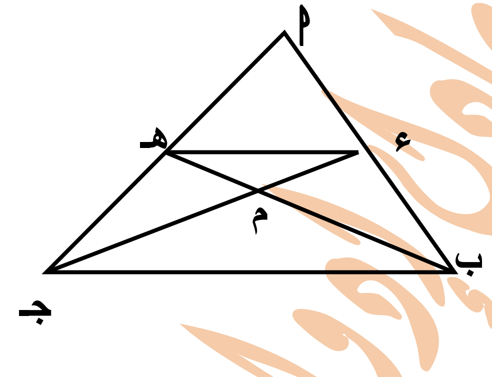
(٥) إذا كان ء هـ = ١٠ سم فإن ب جـ = ١٠ ×٢ = ٢٠ سم

(٦) إذا كان ب جـ = ٨سم فإن ء هـ = ٨ ÷ ٢ = ٤ سم

(٧) ء هـ : ب جـ = ١ :٢

مثـــال : فى الشكل المقابل ء، هـ منتصفا أب ، أجـ ، ب م =٦سم، ب جـ = ١٠سم ء جـ = ١٢ سم . إوجد محيط Δ ء م هـ

الحـــــــل



ء منتصف أب ∴ جـ ء متوسط

∴ م ء = $\frac{١}{٣}$ جـ ء = $\frac{١}{٣}$ ×١٢ = ٤سم

هـ منتصف أجـ ∴ب هـ متوسط

∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ ×٦ = ٣سم

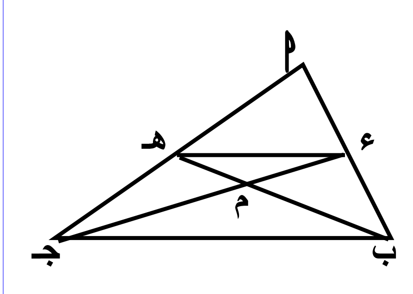
ء منتصف أ ب ، ∴ هـ منتصف أ جـ

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠= ٥سم

محيط Δء م هـ = ء م + م هـ + ء هـ = ٤ + ٣ + ٥ = ١٢سم

مثـــال : فى الشكل المقابل إذا كان ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ
محيط △ ء م هـ = ٢٠ سم أوجد محيط △ م ب جـ

الحــــــل



ء منتصف أ ب ∴ جـ ء متوسط ∴ م جـ = ٢ م ء

هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ متوسط ∴ م ب = ٢ م هـ

ء، هـ منتصفى أ ب ، أ جـ ∴ ب جـ = ٢ ء هـ

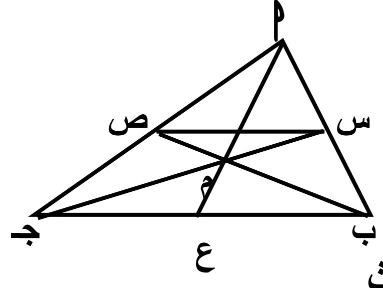
محيط م ب جـ = م جـ + م ب + ب جـ

= ٢ م ء + ٢ م هـ + ٢ ء هـ = ٢ (م ء + م هـ + ء هـ)

= ٢ محيط △ ء م هـ = ٢ × ٢٠سم = ٤٠ سم

مثـــال : أ ب جـ مثلث فيه س منتصف أ ب ، ص ∋ أ جـ ، س ص // ب جـ
جـ س ∩ ب ص = {م} فإذا كان أ م ∩ ب جـ = { ع } إثبت أن: ع منتصف ب جـ

الحــــــل



س منتصف أ ب ، س ص // ب جـ ∴ ص منتصف أ جـ

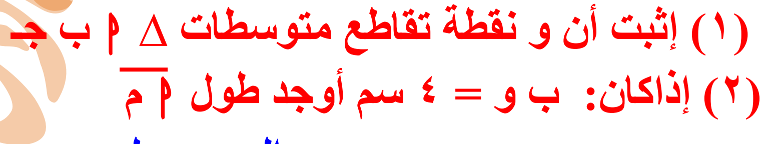
س منتصف أ ب ∴ جـ س متوسط

ص منتصف أ جـ ∴ ب ص متوسط

ب ص ∩ جـ س = { م } ∴ م نقطة تلاقى متوسطات المثلث

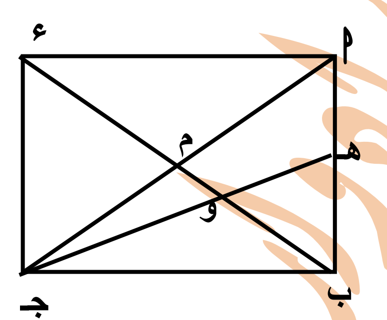
∴ أ ع متوسط للمثلث ∴ ع منتصف ب جـ

مثـــال : أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف أ ب ، جـ هـ ∩ ب ء = { و }



(١) إثبت أن و نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب جـ
(٢) إذاكان: ب و = ٤ سم أوجد طول أ م

الحــــــل



هـ منتصف أ ب ∴ جـ هـ متوسط فى △ أ ب جـ

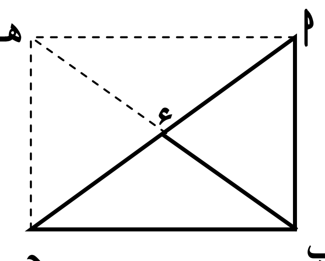
م منتصف أ جـ (القطران ينصف كلا منهما الاخر)

∴ ب م متوسط فى △ أ ب جـ

جـ هـ ∩ ب م = { و } ∴ و نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب جـ

ب و = ٤ سم = ∴ و م = ٢سم ∴ ب م = ٦سم ∴ أ م = ب م = ٦ سم

نظرية (٣) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

ب ء متوسط فى المثلث أ ب جـ

المطلوب إثبات أن ب ء = $\frac{1}{2}$ أ جـ

العمل نرسم ب ء ونأخذ هـ ∋ ب ء بحيث: ب ء = ء هـ

البرهان الشكل أ ب جـ هـ فيه أ جـ ، ب هـ ينصف كلا منهما الاخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازى أضلاع

ق (∠ أب جـ) = ٩٠ ∴ الشكل أب جـ هـ مستطيل

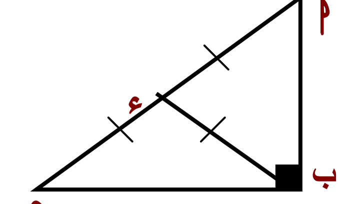
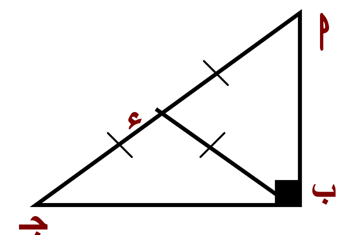
∴ ب هـ = أ جـ ⟸ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أجـ

فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان ء منتصف أ جـ ، أ جـ = ١٠ سم فإن ب ء = ٥ سم



والعكس صحيح

إذا كان ء منتصف أجـ وكان ب ء = ٣سم فإن أجـ = ٦سم

لاحظ أن ب ء = أء = ء جـ وبالتالى فإن

(١) المثلث أ ب ء يكون مثلث متساوى الساقين

(٢) المثلث ب ء جـ يكون مثلث متساوى الساقين

عكس نظرية (٣) إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات أ ب جـ مثلث ، ب ء متوسط

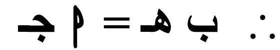
، ء أ = ء ب = ء جـ



المطلوب: إثبات أن ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

العمل : نرسم ب ء ونأخذ هـ ∋ ب ء بحيث ب ء = ء هـ

البرهان : ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

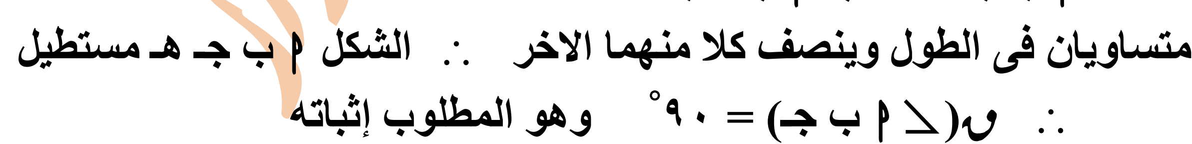


∴ ب هـ = أ جـ

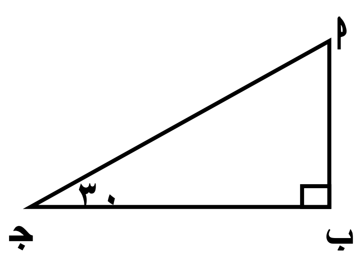
الشكل أ ب جـ هـ فيه أ جـ ، ب هـ

متساويان فى الطول وينصف كلا منهما الاخر ∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠° وهو المطلوب إثباته



نتيجة : طول الضلع المقابل للزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°

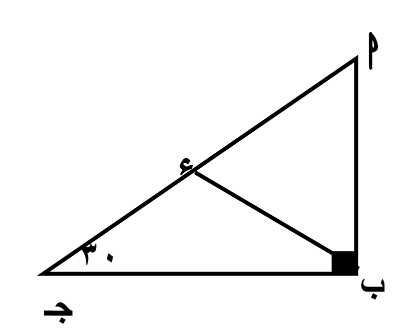
∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

إذا كان: أ جـ = ١٠سم فإن أ ب = ٥سم

إذا كان : أ ب = ٦سم ، فإن أ جـ = ١٢سم

مثـــال : فى الشكل المقابل Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°

، ء منتصف $\overline{أجـ}$ أوجد محيط Δ أ ب ء



الحـــــل

ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

∴ $\overline{ب ء}$ المتوسط = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

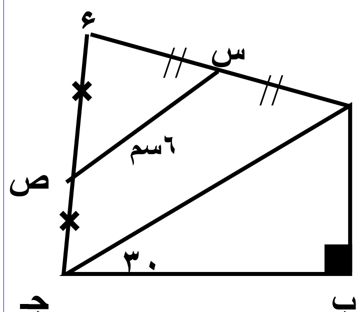
Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

محيط Δ أ ب ء = أ ب + ب ء + ء أ = ٥ + ٥ +٥ = ١٥سم

مثـــال : Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠أ جـ ب) = ٣٠° ، س ص = ٦سم

س منتصف $\overline{أء}$ ، ص منتصف $\overline{ء جـ}$ أوجد طول $\overline{أب}$



الحـــــل

Δ ء أ جـ فيه : س ، ص منتصفى $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ء جـ}$

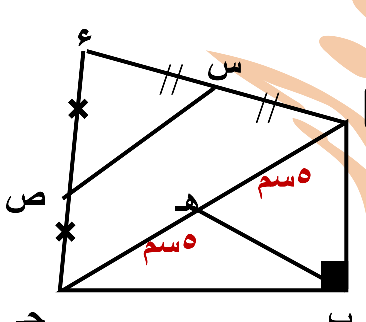
∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ أ جـ = ١٢ سم

فى Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠أ جـ ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ١٢ ÷ ٢ = ٦ سم

مثـــال : Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، هـ أ = هـ جـ = ٥ سم

س منتصف $\overline{أء}$ ، ص منتصف $\overline{ء جـ}$ أوجد طول $\overline{س ص}$ ، $\overline{ب هـ}$



الحـــــل

Δ ء أ جـ فيه : س ، ص منتصفى $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ء جـ}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ س ص = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

فى Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{ب هـ}$ متوسط

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

تمارين

(١) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

ق (∠ جـ) = ٣٠° ، ب ء ⊥ أ جـ

فإذا كان أ ء = ٣ سم أحسب طول أ ب ، ء جـ

(٢) فى الشكل المقابل

س منتصف أ ء ، ص منتصف ء جـ


إثبت أن : أ ب = س ص


(٣) فى الشكل المقابل

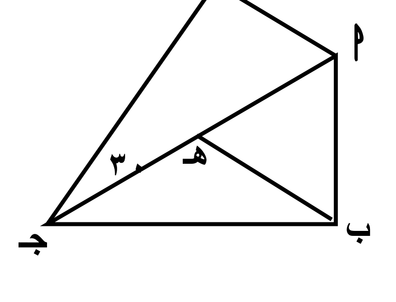
إثبت أن ب ء = $\frac{1}{4}$ أ جـ


(٤) فى الشكل المقابل


ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠°

ق (∠ أ جـ ء) = ٣٠° ، هـ منتصف أ جـ

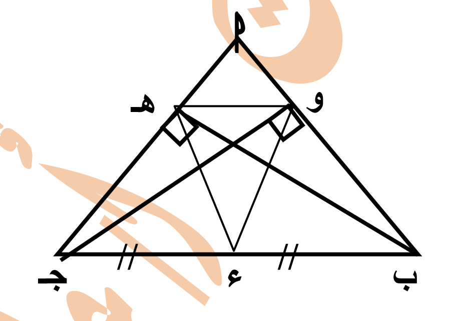
إثبت أن أ ء = ء هـ

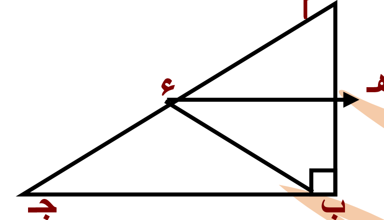



(٦) فى الشكل المقابل

إثبت أن

Δ ء و هـ متساوى الساقين



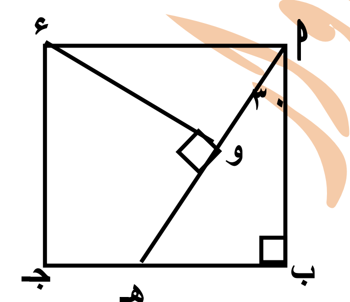


(٧) Δ أ ب جـ فيه ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

، ء منتصف أ جـ ، ء هـ // ب جـ ويقطع أ ب فى هـ إثبت أن

(١) محيط Δ هـ ب ء = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب جـ

(٢) Δ أ ء ب متساوى الساقين



(٨) فى الشكل المقابل

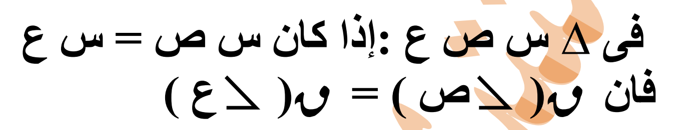
أ ب جـ ء مربع ، هـ ∈ ب جـ

ق (∠ ب أ هـ) = ٣٠° ، ء و ⊥ أ هـ

فإذا كان أو = ٤ سم أحسب مساحة المربع

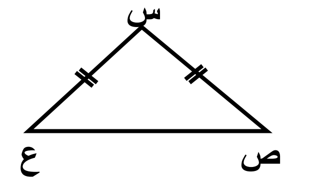
المثلث المتساوى الساقين

نظرية (١) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان



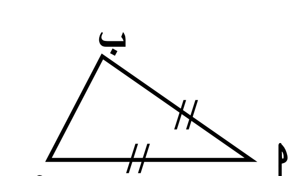
فى Δ س ص ع :إذا كان س ص = س ع

فان ق(∠ص) = ق(∠ع)

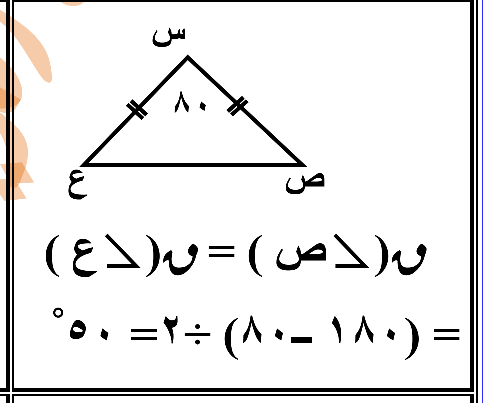
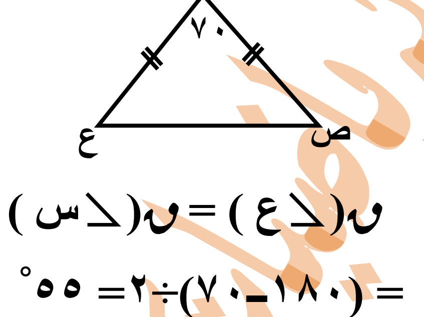
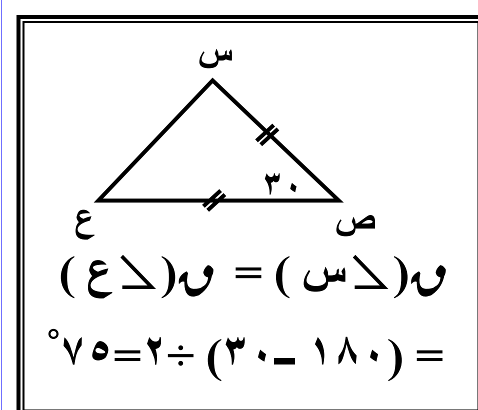
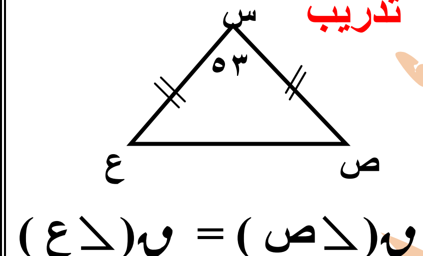


فى Δ أ ب جـ :إذا كان أ ب = أ جـ

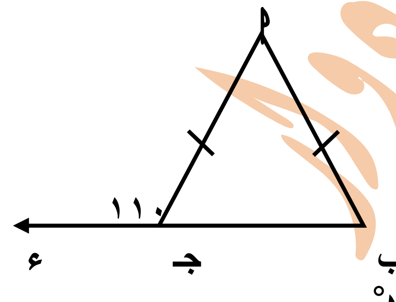
فان ق(∠جـ) = ق(∠ب)



س فى كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب

 ق(∠ص) = ق(∠ع) = (١٨٠ ــ ٨٠) ÷٢= ٥٠°	 ق(∠ع) = ق(∠س) = (١٨٠ــ٧٠)÷٢= ٥٥°	 ق(∠س) = ق(∠ع) = (١٨٠ ــ ٣٠) ÷٢= ٧٥°
تدريب ق(∠أ) = ق(∠ب) = ... = ...	تدريب ق(∠ء) = ق(∠هـ) = ... = ...	تدريب  ق(∠ص) = ق(∠ع) = ... = ...

مثـــال : إذا كانت ء ∋ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، أب = أ جـ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



الحـــل

ق(∠أ جـ ب) + ق(∠أ جـ ء) = ١٨٠

[زاويتان متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

∴ ق(∠أ جـ ب) = ١٨٠ ــ ١١٠ = ٧٠°

أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠أ جـ ب) = ٧٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ م) = ١٨٠° – [٧٠ + ٧٠] = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

مثـــال فى الشكل: ص س ⟵ // ع و ⟵ ، س ص = س ع أوجد قياسات زوايا Δ س ص ع

الحــــــل

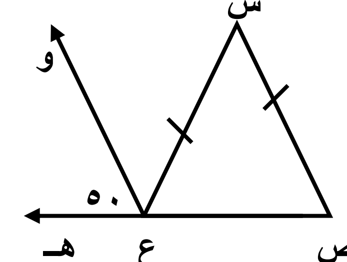
ص س ⟵ // ع و ⟵ ، ص هـ ⟵ قاطع لهما

∴ ق(∠ ص) = ق(∠ و ع هـ) = ٥٠° [متناظرتان]

س ص = س ع ∴ ق(∠ ص) = ق(∠ س ع ص) = ٥٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ س) = ١٨٠° – [٥٠° + ٥٠°] = ١٨٠° – ١٠٠° = ٨٠°



مثـــال فى الشكل: م ب = م جـ ، م هـ ⟵ // جـ ب ⟵ أوجد قياسات زوايا Δ م ب جـ

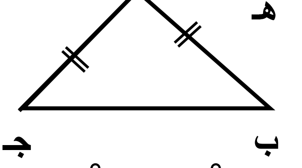
الحــــــل

م هـ ⟵ // جـ ب ⟵ ∴ ق(∠ ء م هـ) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

م ب = م جـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب م جـ) = ١٨٠° – [٧٠° + ٧٠°] = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°



مثـــال فى الشكل : ب ء = م ء = م جـ ، ق(∠ ب م ء) = ٣٠° أوجد ق(∠ ء م جـ)

الحــــــل

فى Δ م ب ء ب ء = م ء

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ب م ء) = ٣٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ م ء ب) = ١٨٠° – [٣٠° + ٣٠°] = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠°

ق(∠ م ء ب) + ق(∠ م ء جـ) = ١٨٠°

[متجاورتان حادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع بدايته تقع على المستقيم]

∴ ق(∠ ٢ ء جـ) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٨٠°

فى △ ٢ ء جـ ٢ء = ٢جـ ∴ ق(∠ ٢ ء جـ) = ∴ = ق(∠ ٢ جـ ء) = ٨٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق(∠ء ٢ جـ) = ١٨٠° − [٨٠° + ٨٠°] = ١٨٠° − ١٦٠° = ٢٠°

مثـــال فى الشكل : ٢ب = ٢جـ ، ٢هـ // ب جـ إثبت أن ٢هـ ينصف ∠ ء ٢ ب

الحـــــــل

٢ب = ٢جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) (١)

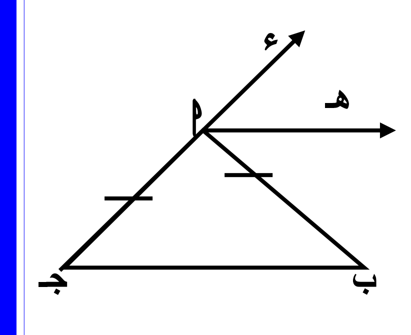
٢هـ // جـ ب ، جـ ء قاطع لهما

∴ ق(∠ ء ٢ هـ) = ق(∠جـ) [متناظرتان] (٢)

∴ ق(∠هـ٢ب) = ق(∠ب) [متبادلتان] (٣)

من ١ ، ٢ ،٣ ينتج أن ق(∠ ء ٢ هـ) = ق(∠ هـ ٢ب)

∴ ٢هـ ينصف (∠ ء ٢ب)



مثـــال :فى الشكل : ب ء = ب جـ أوجد: ق(∠ب جـ ء) ، ق(∠ ء ب جـ)

الحـــــــل

ق(∠ب ء جـ) = ق(∠ ٢) + ق(∠ ٢ب ء)

لانها خارجة عن △ ٢ ب ء

∴ ق(∠ب ء جـ) = ٣٠° + ٤٠° = ٧٠°

ب ء = ب جـ ∴ ق(∠ب ء جـ) = ق(∠جـ) =٧٠°

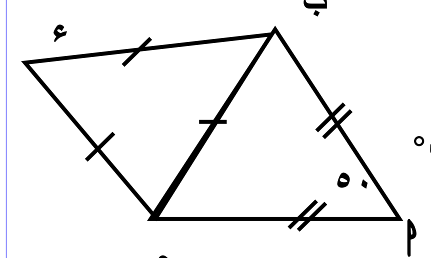
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ء ب جـ) = ١٨٠° − [٧٠° + ٧٠°] = ٤٠°

ملاحظة: قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها

نتيجة : إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة قياسها ٦٠°

مثـــال فى الشكل : ق(∠ م) = ٥٠° ، م ب = م جـ ، Δء ب جـ متساوى الاضلاع
أوجد ق(∠ م ب ء)



الحــــــل

فى Δ م ب جـ فيه م ب = م جـ

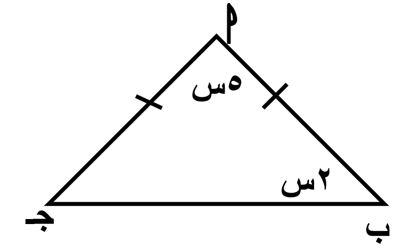
∴ ق(∠ م ب جـ) = ق(∠ م جـ ب) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°

فى Δ ب جـ ء فيه ب ء = ء جـ = ب جـ

∴ ق(∠ جـ ب ء) = ق(∠ ب ء جـ) = ق(∠ ء ب جـ) = ٦٠°

∴ ق(∠ م ب ء) = ٦٠° + ٦٥° = ١٢٥°

مثـــال : فى الشكل: م ب = م جـ ، ق(∠ م) = ٥س° ، ق(∠ب) = ٢س°
أحسب قياسات زوايا Δ م ب جـ



الحــــــل

م ب = م جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٢س°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(∠ م) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

٥ س + ٢س + ٢ س = ١٨٠° ⟸ ٩ س = ١٨٠° ∴ س = ٢٠°

ق(∠ م) = ٥س = ٥ × ٢٠° = ١٠٠°

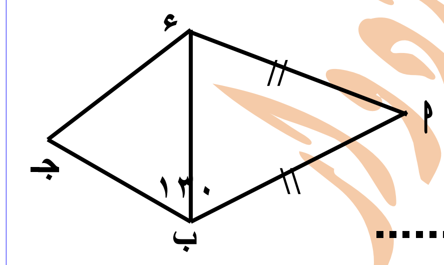
ق(∠ب) = ٢ س = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

ق(∠جـ) = ٢س = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

تمـــــارين



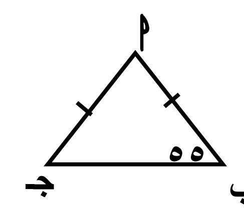
(١) فى الشكل : م ء = م ب ، Δ ب ء جـ متساوى الاضلاع ،
ق(∠ م ب جـ) = ١٣٠° أكمل



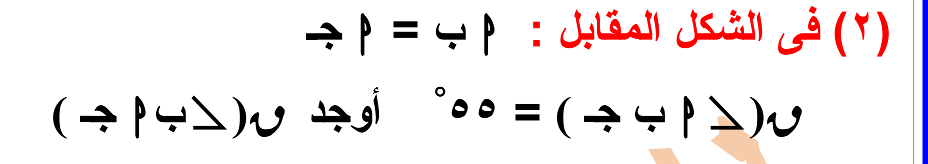
(١) ق(∠ ء ب جـ) = ...

(٢) ق(∠ م ب ء) = ... (٤) ق(∠ب ء جـ) = ...

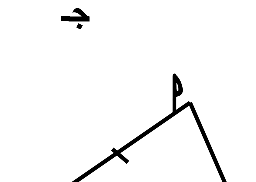
(٣) ق(∠ م ء ب) = ... (٥) ق(∠ب م ء) = ...



(٢) في الشكل المقابل : أ ب = أ جـ

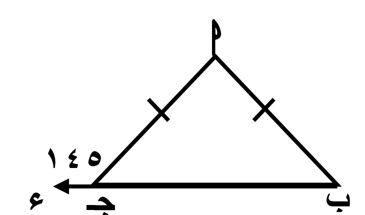


ق(∠ أ ب جـ) = ٥٥° أوجد ق(∠ب أ جـ)



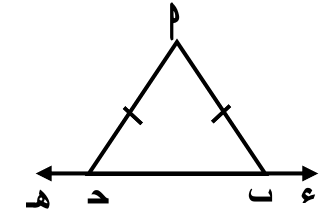
(٣) في الشكل المقابل أ ب = أ جـ

ق(∠ أ جـ ب) = ٤٢° أوجد ق(∠ أ ب جـ)



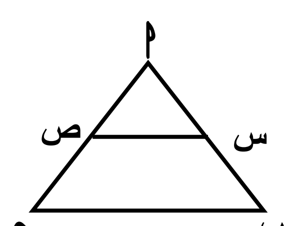
(٤) في الشكل المقابل أ ب = أ جـ

ق(∠ أ جـ ء) = ١٤٥° أوجد ق(∠ب أ جـ)



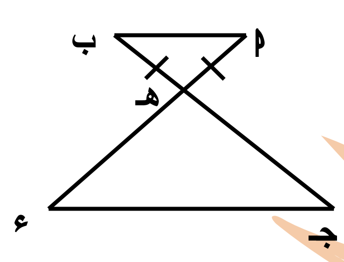
(٥) في الشكل المقابل أ ب = أ جـ

إثبت أن ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ هـ)



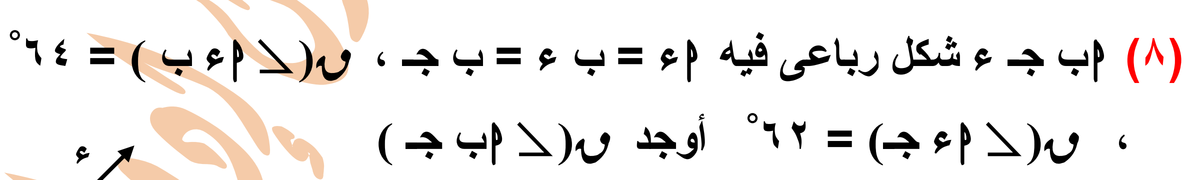
(٦) في الشكل المقابل أب = أجـ ، س ص // ب جـ

إثبت أن ق(∠ أس ص) = ق(∠ أ ص س)



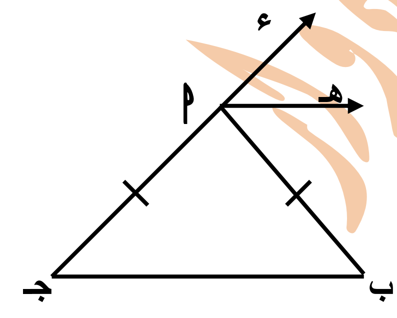
(٧) في الشكل المقابل أهـ = هـ ب

أ ب // جـ ء إثبت أن ق(∠جـ) = ق(∠ء)



(٨) أب جـ ء شكل رباعى فيه أء = ب ء = ب جـ ، ق(∠ أ ء ب) = ٦٤°

، ق(∠ أء جـ) = ٦٢° أوجد ق(∠ أب جـ)



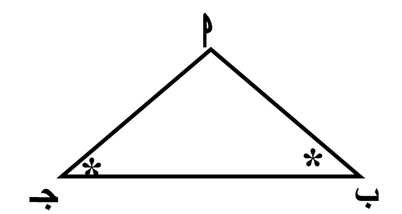
(٩) في الشكل المقابل أ ب = أ جـ

أهـ // ب جـ إثبت أن أهـ ينصف ∠ ء أ هـ

نظرية (٢)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فان الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتان يتطابقان ويكون المثلث متساوى الساقين

فمثلا فى الشكل المقابل

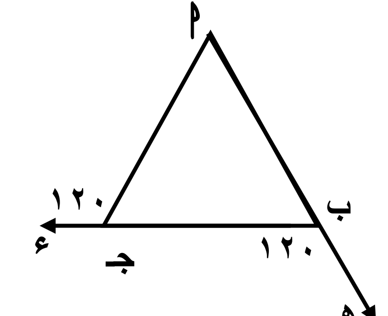


إذا كان ق(∠ب) = ق(∠جـ)

فان م ب = م جـ

نتيجة : إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الاضلاع

مثـــال : فى الشكل المقابل إثبت أن ∆ م ب جـ متساوى الاضلاع



الحـــل

ق(∠ م ب جـ) + ق(∠هـ ب جـ) = ١٨٠°

ق(∠ م ب جـ) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

ق(∠ م جـ ب) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(∠ م) = ١٨٠° – [٦٠ + ٦٠] = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

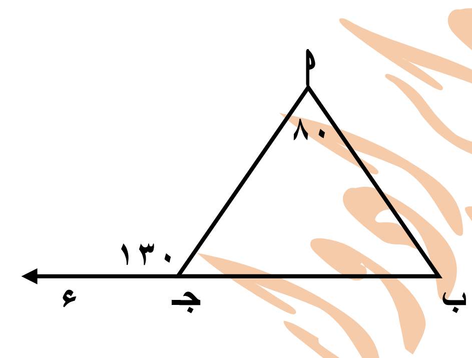
ق(∠ م) = ق(∠ م ب جـ) = ق(∠ م جـ ب) ∴ ∆ م ب جـ متساوى الاضلاع

مثـــال : فى الشكل المقابل إثبت أن المثلث م ب جـ متساوى الساقين

الحـــل

ق(∠ م جـ ب) + ق(∠ م جـ ء) = ١٨٠°


[متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]



∴ ق(∠ م جـ ب) = ١٨٠° – ١٣٠ = ٥٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

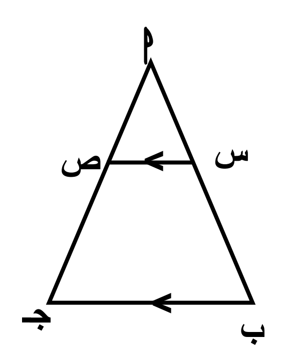
∴ ق(∠ م) = ١٨٠° – [٨٠ + ٥٠] = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

ق(∠ م) = ق(∠ م جـ ب) = ٥٠°

∴ أ ب = ب جـ [المثلث متساوى الساقين]

مثـــال فى الشكل: أب = أجـ ، س ص // ب جـ أثبت أن ∆ أس ص متساوى الساقين

الحـــل



فى ∆ أ ب جـ أب = أجـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) - - - - - (١)

س ص // ب جـ

∴ ق(∠ أس ص) = ق(∠ب) [بالتناظر] - - - - - (٢)

∴ ق(أ ص س) = ق(∠جـ) [بالتناظر] - - - - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠ أس ص) = ق(∠ أ ص س) ∴ ∆ أس ص متساوى الساقين

مثـــال : فى الشكل المقابل: إثبت ان ∆ أ ب جـ متساوى الاضلاع

الحـــل

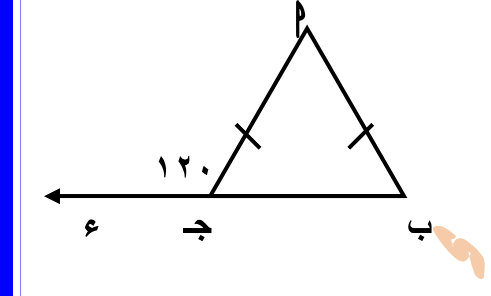


ق(∠ أجـ ء) + ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

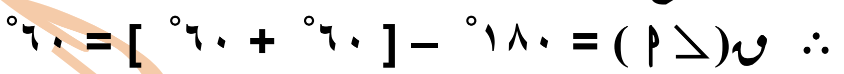
فى ∆ أب جـ ∴ أب = أجـ

∴ ق(∠ أب جـ) = ق(∠ أجـ ب) = ٦٠°



مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – [٦٠° + ٦٠°] = ٦٠°

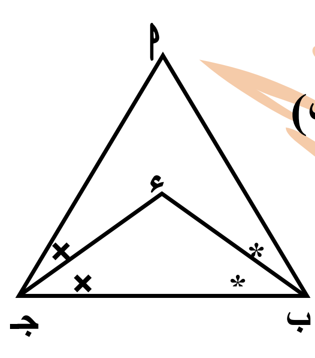


ق(∠أ) = ق(∠ أب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) ∴ ∆ أب جـ متساوى الاضلاع

مثـــال : فى الشكل: أب = أجـ ، ب ء ينصف ∠ أ ب جـ ، جـ ء ينصف ∠ أ جـ ء

إثبت أن ∆ ء ب جـ متساوى الساقين

الحـــل



أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

ب ء ينصف ∠ أب جـ ∴ ق(∠ ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب)

جـ ء ينصف ∠ أجـ ء ∴ ق(∠ ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠جـ)

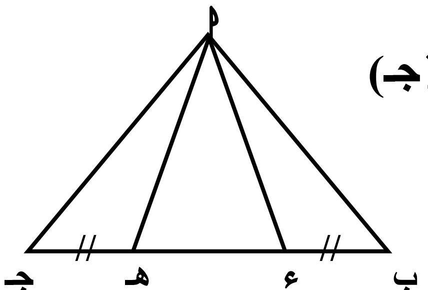
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب)

∴ Δ ء ب جـ متساوى الساقين

مثـــال : فى الشكل : م ب = م جـ ، ب ء = هـ جـ إثبت أن Δ م ء هـ متساوى الساقين

الحـــــل



Δ م ب جـ فيه م ب = م جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

Δ م ب ء ، Δ م هـ جـ

فيهما { م ب = م جـ ، ب ء = هـ جـ
ق(∠ب) = ق(∠جـ) }

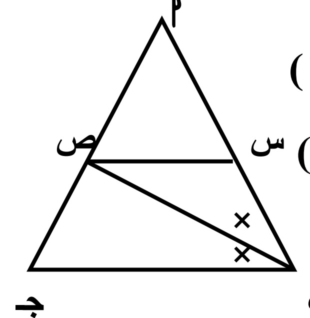
∴ Δ م ب ء ≡ Δ م جـ هـ

ومن التطابق ينتج أن م ء = م هـ ∴ Δ م ء هـ متساوى الساقين

مثـــال فى الشكل : س ص // ب جـ ، ب ص ينصف ∠ م ب جـ

إثبت أن Δ س ب ص متساوى الساقين

الحـــــل



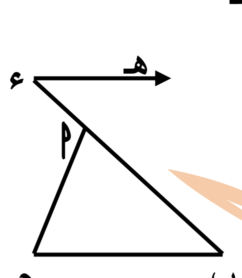
س ص // ب جـ ∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠ص ب جـ) (١)

ب ص ينصف أب جـ ∴ ق(∠س ب ص) = ق(∠ص ب جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠س ب ص)

∴ Δ س ب ص متساوى الساقين

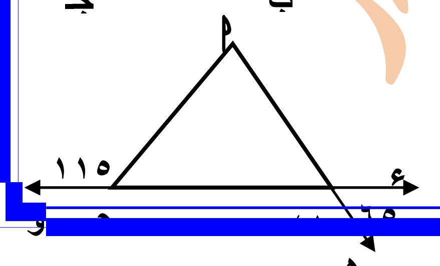
تمارين



(١) فى الشكل : ق(∠م) = ٤٠° ، ق(∠ب)= ٧٠°

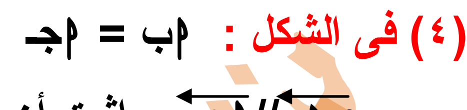
إثبت أن Δ م ب جـ متساوى الساقين

(٢) فى الشكل : ء هـ // ب جـ ق(∠هـ ء م) = ١٢٠° ، ق(∠ب)= ٦٠° أثبت أن Δ م ب جـ متساوى الاضلاع



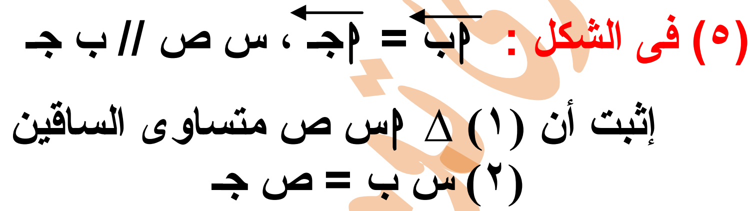
(٣) فى الشكل : ق(∠م جـ و) = ١١٥°

ق(∠ ء ب هـ) = ٦٥° إثبت أن △ أب جـ متساوى الساقين



(٤) فى الشكل : أب = أجـ

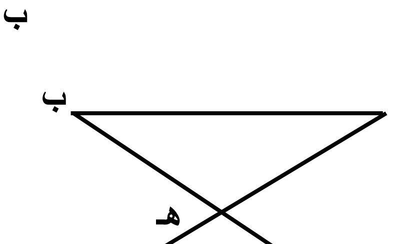
ءهـ // أجـ إثبت أن ء هـ = ب هـ



(٥) فى الشكل : أب = أجـ ، س ص // ب جـ

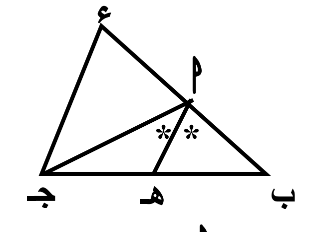
إثبت أن (١) △ أس ص متساوى الساقين

(٢) س ب = ص جـ



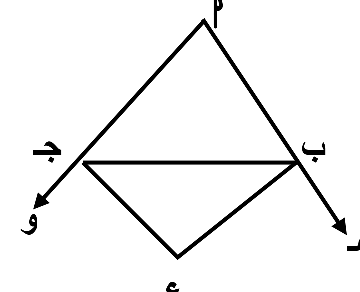
(٦) فى الشكل: هـ جـ = هـ ء

أب // جـ ء إثبت أن أ هـ = ب هـ



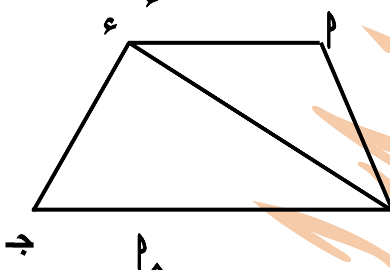
(٧) فى الشكل : أهـ ينصف ∠ ب أجـ ،

أهـ // ء جـ إثبت أن △ ء أ جـ متساوى الساقين



(٨) فى الشكل : أب = أجـ ، ب ء ينصف ∠ هـ ب جـ

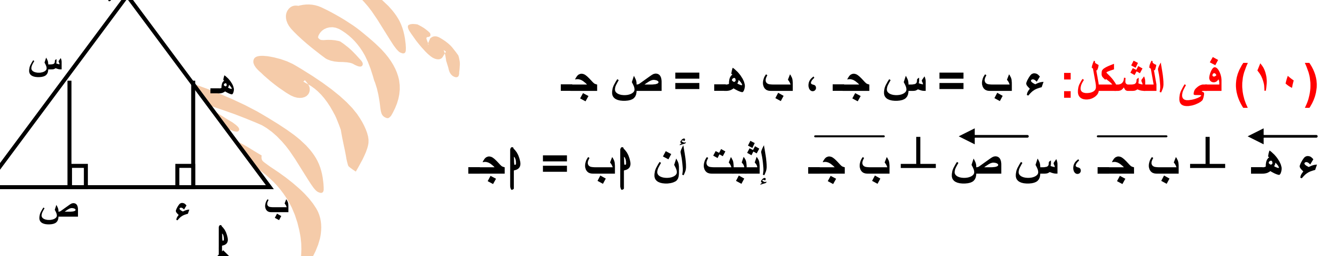
، جـ ء ينصف ∠ ب جـ و إثبت أن ب ء = ء جـ



(٩) فى الشكل : ب ء = ب جـ ، أ ء // ب جـ

ق(∠ ب ء جـ) = ٧٠°

ق(∠ ب أ ء) = ١٠٠° إثبت أن أب = أء



(١٠) فى الشكل: ء ب = س جـ ، ب هـ = ص جـ

ء هـ ⊥ ب جـ ، س ص ⊥ ب جـ إثبت أن أب = أجـ



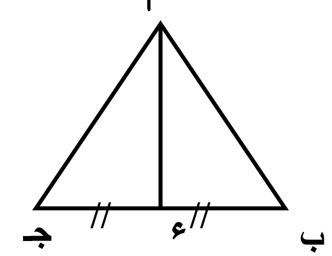
(١١) فى الشكل: ق(∠ أ س ص) = ق(∠ أ ص س) ،

ب س = جـ ص   إثبت أن: Δ أب جـ متساوى الساقين

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة



في الشكل المقابل إذا كان $\overleftarrow{أء}$ متوسط (ء منتصف $\overline{ب جـ}$)

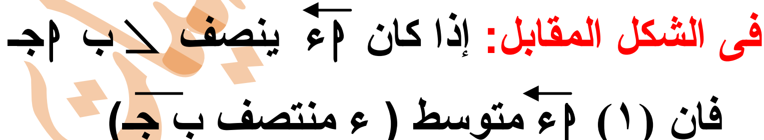
فان (١) $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ جـ

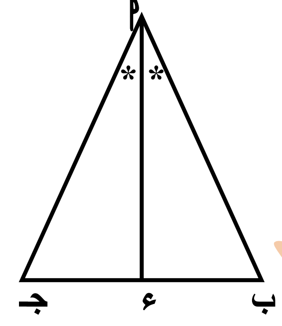
(٢) $\overleftarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

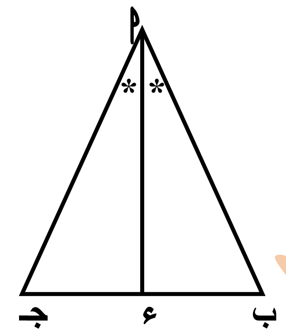
نتيجة (٢)

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها









في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أجـ

فان (١) $\overleftarrow{أء}$ متوسط (ء منتصف $\overline{ب جـ}$)

(٢) $\overleftarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

نتيجة (٣)

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

فان (١) $\overleftarrow{أء}$ متوسط (ء منتصف $\overline{ب جـ}$)

(٢) $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ جـ



محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين

محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديا

على القاعدة

في الشكل المقابل : إذا كان أء ⊥ ب ج

فإن أء يسمى محور تماثل للمثلث أ ب ج

خاصية هامة : أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

ملاحظة

(١) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الساقين = محور واحد

(٢) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الاضلاع = ثلاث محاور

(٣) عدد محاور التماثل للمثلث المختلف الاضلاع = ليس له محاور

تعريف محور القطعة المستقيمة

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

إذا كان المستقيم ل ⊥ ب ج من منتصفها فإن ل يسمى محور لـ ب ج

مثــال : في الشكل: أب = أج ، ق(∠ب أ ء) = ٢٥° ، أء ⊥ ب ج ، ب ج = ٦سم أوجد : (١) طول ء ج (٢) ق(∠ أ ج ب)

الحـــل

أب = أج ⟸ Δ أب ج متساوى الساقين ، أء ⊥ ب ج

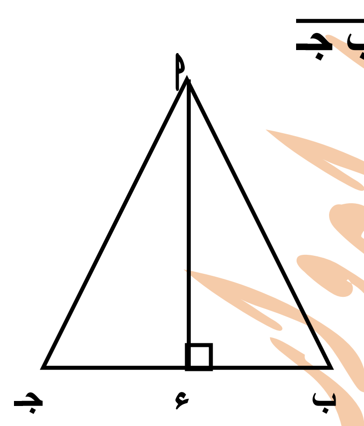
أء متوسط ب ء = ء ج = ٣سم

، أء ينصف ∠ ب أج

∴ ق(∠ب أء) = ق(∠ج أء) = ٢٥°

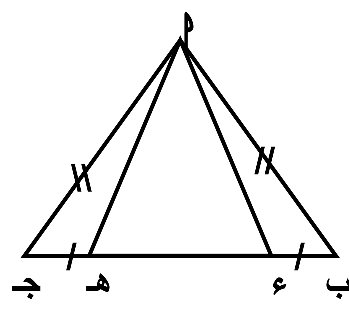
مجموع قياسات زوايا Δ أء ج = ١٨٠°

∴ ق(∠ ج) = ١٨٠° – [٩٠° + ٢٥°] = ٦٥°



مثـــال : فى الشكل : م ب = م جـ ، ب ء = هـ جـ ، إثبت أن Δ م ء هـ متساوى الساقين

الحـــــل



فى Δ Δ م ب ء ، م جـ هـ

فيهما { ب ء = ء جـ ، م ب = م جـ معطى
ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) Δ م ب جـ متساوى الساقين }

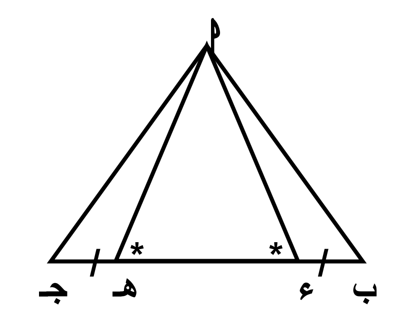
∴ Δ م ب ء ≡ Δ م جـ هـ ومن التطابق ينتج أن

م ء = م هـ ∴ Δ م ء هـ متساوى الساقين

مثـــال : فى الشكل : ب ء = هـ جـ ، ق(∠ م ء هـ) = ق(∠ م هـ ء)

إثبت أن : Δ م ب جـ متساوى الساقين

الحـــــل



ق(∠ م ء هـ) = ق(∠ م هـ ء) ∴ م ء = م هـ

ق(∠ م ء ب) = ق(∠ م هـ جـ)

[مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية]

فى : Δ Δ م ب ء ، م هـ جـ

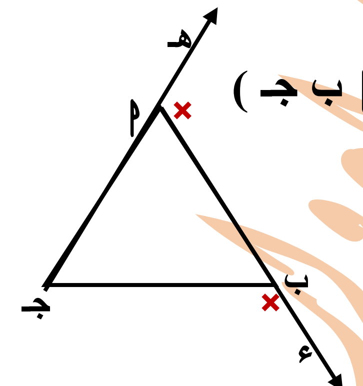
فيهما { م ء = م هـ ، ب ء = هـ جـ
ق(∠ م ء ب) = ق(∠ م هـ جـ) }

∴ Δ م ب ء ≡ Δ م جـ هـ ومن التطابق ينتج أن

م ب = م جـ ∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

مثـــال فى الشكل: ق(∠ هـ م ب)=ق(∠ ء ب جـ) إثبت أن Δ م ب جـ متساوى الساقين

الحـــــل



ق(∠ هـ م ب)+ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ ء ب جـ)+ق(∠ م ب جـ)

[مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية]

∴ ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ م ب جـ)

∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

مثـــال فى الشكل: م ب جـ ء مستطيل ،ب و = جـ هـ إثبت أن: Δ ل و هـ متساوى الساقين

ل

الحـــــل

Δ Δ م ب و ، ل جـ ء فيهما أ ب = ء جـ ، ب و = جـ ل

، ق(∠ م) = ق(∠ ء) = ٩٠

∴ Δ م ب و ≡ Δ ء جـ و ⇐ ق(∠ م و ب) = ق(∠جـ ل ء)

ق(∠ م و ب) = ق(∠ هـ و ل)، ق(∠جـ ل ء) = ق(∠ هـ ل و)

ق(∠ هـ و ل) = ق(∠ هـ ل و) ∴ هـ و = هـ ل

التباين فى المثلثات

مسلمات التباين بفرض ان: س ، ص ، ع أعداد فان

(١) إذا كان س > ص فان س + ع > ص + ع

(٢) إذا كان س > ص فان س ـ ع > ص - ع

(٣) إذا كان س > ص ، ع (عدد موجب) فان س ع > ص ع

(٤) إذا كان س > ص ، ع (عدد سالب) فان س ع < ص ع

(٥) إذا كان س > ص ، ص > ع فان س > ع

(٦) إذا كان س > ص ، م > ب فان س + م > ص + ب

مثـــال : فى الشكل : ق(∠ م ب ء) > ق(∠ م جـ ء) ، ء ب = ء جـ

إثبت أن ق(∠ب) > ق(∠جـ)

الحـــــل

ق(∠ م ب ء) > ق(∠ م جـ ء) (١)

ء ب = ء جـ

ق(∠ ء ب جـ) = ق ق(∠ ء جـ ب) (٢)

بجمع ١ ، ٢

ق(∠ م ب ء) + ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ م جـ ء) + ق(∠ ء جـ ب)

ق(∠ب) > ق(∠جـ)

مثـــال ق(∠ م ب جـ) > ق(∠ م جـ ب) ، ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ ء جـ ب)

إثبت أن ق(∠ب) > ق(∠جـ)

الحـــــل

ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب)   (١)

ق(∠ ء ب جـ) > ق ق(∠ ء جـ ب)   (٢)

بجمع ١ ، ٢

ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) + ق(∠ ء جـ ب)

ق(∠ ب) > ق(∠ جـ)

مثـــال : فى الشكل: إثبت أن   ق(∠ ب ء جـ) > ق(∠ أ)

الحـــــل

تذكرأن : قياس أى زاوية خرجة للمثلث أكبر من أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها

ق(∠ ب ء هـ) الخارجة > ق(∠ ب أ ء) - - - - - (١)

ق(∠ جـ ء هـ) الخارجة > ق(∠ ء أ جـ) - - - - - (٢)

بجمع ١،٢ : ق(∠ ب ء هـ) + ق(∠ جـ ء هـ) > ق(∠ ب أ ء) + ق(∠ ء أ جـ)

ق(∠ ب ء جـ) > ق(∠ أ)   وهو المطلوب إثباته

المقارنة بين قياسات الزوايا فى مثلث

نظـــــرية (٣)

إذا أختلف طولا ضلعين من مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من الزاويةالمقابلة للضلع الاخر .

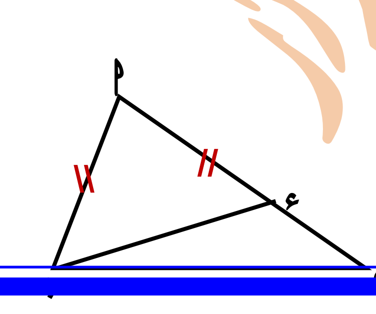
المعطيات : Δ أ ب جـ فيه أب > أجـ

المطلوب : إثبات أن ق(∠ أجـ ب) > ق(∠ أب جـ)

العمل : نأخذ النقطة ء ∈ أ ب بحيث أ ء = أ جـ

البرهان : فى Δ أ جـ ء فيه أ ء = أ جـ

∴ ق(∠ أ جـ ء) = ق(∠ أ ء جـ) - - - - (١)



∵ ∠ أ ء جـ خارجة عن Δ ب جـ ء

∴ ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠ ء ب جـ) - - - (٢)

من ١ ، ٢ نستنتج

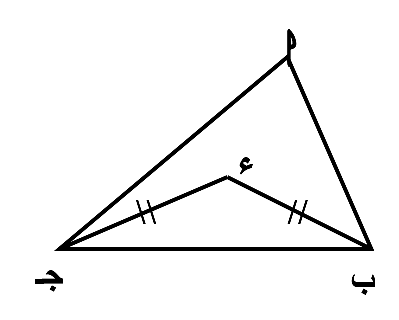
ق(∠ أ جـ ء) > ق(∠ ء ب جـ)

فيكون ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ أ جـ ء)

∴ ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ أ ب جـ) وهو المطلوب

مثـــال فى الشكل: أ جـ > أ ب ، ب ء = ء جـ إثبت أن ق(∠ أ ب ء) > ق(∠ أ جـ ء)

الحـــــل



فى Δ أ ب جـ ∵ أ جـ > أ ب

∴ ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) - - - - (١)

فى Δ ب جـ ء ∵ ء جـ = ء ب

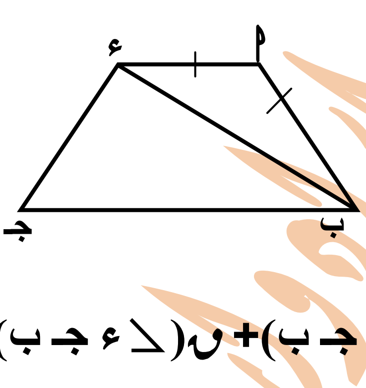
∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب) - - - (٢)

بطرح (١-٢) ق(∠ أ ب جـ) - ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) - ق(∠ ء جـ ب)

∴ ق(∠ أ ب ء) > ق(∠ أ جـ ء)

مثـــال فى الشكل: أ ب = أ ء ، ب جـ > ء جـ إثبت أن : ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠ أ ب جـ)

الحـــــل



فى Δ أ ب ء ∵ أ ء = أ ب

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) - - - - (١)

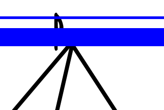
فى Δ ب جـ ء ∵ ب جـ > ء جـ

∴ ق(∠ ب ء جـ) = ق(∠ ء ب جـ) - - - (٢)

بجمع (٢+١) ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب)+ق(∠ ء جـ ب)

∴ ق(∠ أ ب ء) > ق(∠ أ جـ ء)

مثـــال فى الشكل: أ ب = أ جـ ، ء ∋ ب جـ برهن أن : ق(∠ أ ء ب) > ق(∠ب)



الحـــــــل

فى Δ م ب جـ ∵ م ب = م جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) - - - - (١)

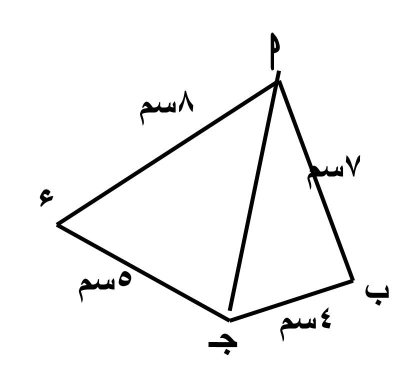
ق(∠م ء ب) > ق(∠جـ) [خارجة عن Δ م ء جـ]

من ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق(∠م ء ب) > ق(∠ب) [وهو المطلوب إثباته]

مثـــال: فى الشكل المقابل برهن ان ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب م ء)

الحـــــــل



فى Δ م ب جـ ∵ م ب > ب جـ

∴ ق(∠م جـ ب) > ق(∠ب م جـ) - - - - (١)

فى Δ م جـ ء ∵ م ء > جـ ء

∴ ق(∠م جـ ء) > ق(∠ء م جـ) - - - (٢)

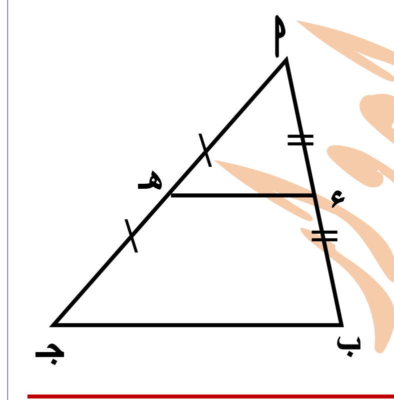
بجمع ١ ، ٢ ق(∠م جـ ب) + ق(∠م جـ ء) > ق(∠ب م جـ) + ق(∠ء م جـ)

∴ ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب م ء)

مثـــال : فى الشكل المقابل م جـ > م ب ، ء ، هـ منتصفا $\overline{مب}$ ، $\overline{مجـ}$

برهن أن ق(∠م ء هـ) > ق(∠م هـ ء)

الحـــــــل



فى Δ م ب جـ م جـ > م ب ∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - - (١)

ء منتصف $\overline{مب}$ ، هـ منتصف $\overline{مجـ}$ ∴ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$

∴ ق(∠م ء هـ) = ق(∠ب) - - - (٢)

∴ ق(∠م هـ ء) = ق(∠جـ) - - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠م ء هـ) > ق(∠م هـ ء)

مثـــال فى الشكل: أب > أ جـ ، ب ء ينصف ∠أب جـ ، جـ ء ينصف ∠أجـ ء
إثبت أن ء ب > ء جـ

الحـــل

أب > أجـ ∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) -- (١)

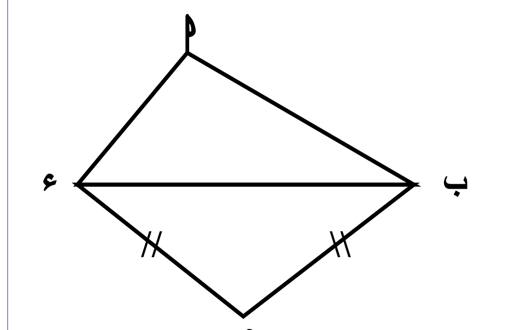
ب ء ينصف ∠أب جـ ∴ ق(∠ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب) -- (٢)

جـ ء ينصف ∠أ جـ ء ∴ ق(∠ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠جـ) -- (٣)

ينتج أن ق(∠ء جـ ب) > ق(∠ء ب جـ) ∴ ء ب > ء جـ

مثـــال فى الشكل: أب > أء ، ب جـ = جـ ء إثبت أن ق(∠أ ء جـ) > ق(∠أ ب جـ)

الحـــل



فى Δ أ ب ء ∵ أ ب > أ ء

∴ ق(∠أ ء ب) > ق(∠أ ب ء) ---- (١)

فى Δ ب جـ ء ∵ جـ ب = جـ ء

∴ ق(∠جـ ء ب) = ق(∠جـ ب ء) --- (٢)

بالجمع ق(∠أ ء ب) + ق(∠جـ ء ب) > ق(∠أ ب ء) + ق(∠جـ ب ء)

∴ ق(∠أ ء جـ) > ق(∠أ ب جـ)

مثـــال فى الشكل: أب > ب جـ ، أء > ء جـ أثبت أن ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب أ ء)

الحـــل

فى Δ أ ب جـ ∵ أ ب > ب جـ

∴ ق(∠أ جـ ب) > ق(∠ب أ جـ) ---- (١)

فى Δ أ جـ ء ∵ أ ء > جـ ء

∴ ق(∠أ جـ ء) = ق(∠جـ أ ء) --- (٢)

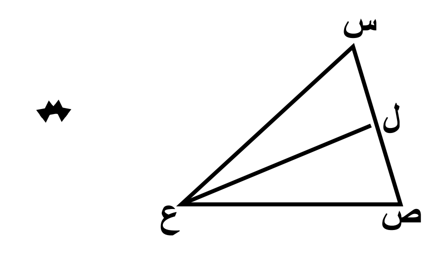
بالجمع ق(∠أ جـ ب) + ق(∠أ جـ ء) > ق(∠ب أ جـ) + ق(∠جـ أ ء)

∴ ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب أ ء)

تمارين

(١) فى الشكل المقابل س ع > س ص

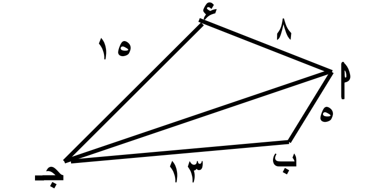
إثبت أن ق(∠س ل ع) > ق(∠س ع ص)





(٢) فى الشكل المقابل

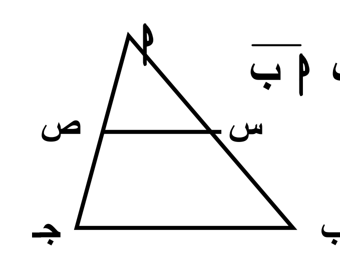
إثبت أن : ق(∠ب م ء) > ق(∠ب جـ ء)



(٣) فى الشكل المقابل م ب > م جـ ، س منتصف $\overline{\text{م ب}}$

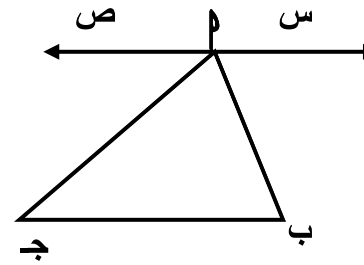
ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ إثبت أن

ق(∠م ص س) > ق(∠م س ص)



(٤) فى الشكل المقابل: م جـ > م ب ، $\overleftarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

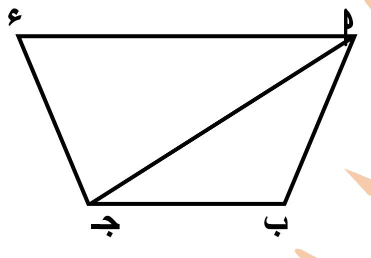
إثبت أن ق(∠س م ب) > ق(∠ص م جـ)



(٥) فى الشكل المقابل م ب جـ ء شكل رباعى

م ب = ب جـ ، م ء > م جـ

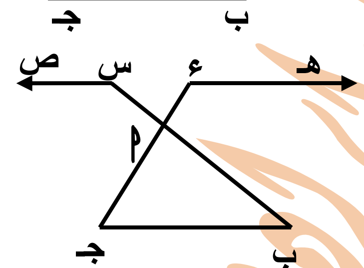
برهن أن : ق(∠جـ) > ق(∠ م)



(٦) فى الشكل المقابل ء هـ // $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overleftarrow{\text{س ص}}$

م ب > م جـ . إثبت أن

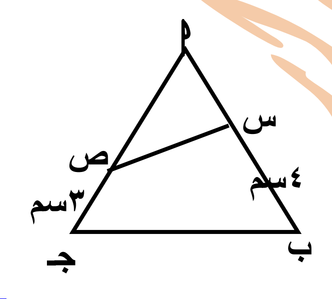
ق(∠هـ ء جـ) > ق(∠ب س ص)



(٧) فى الشكل: م ب = م جـ ، ب س = ٤سم ، جـ ص = ٣سم

إثبت أن(١) ق(∠م س ص) > ق(∠م ص س)

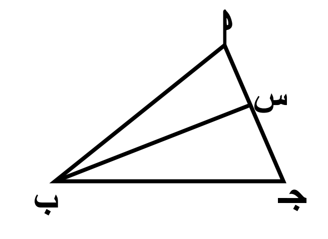
(٢) ق(∠ب س ص) > ق(∠س ص جـ)





(٨) فى الشكل المقابل : أب > أجـ

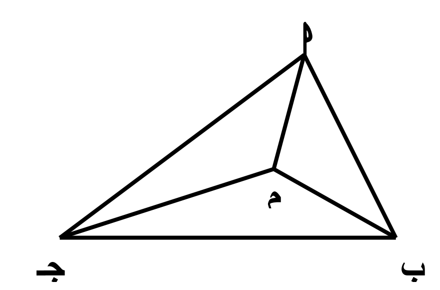
إثبت أن ق(∠ أس ب) > ق(∠ أب جـ)



(١٠) فى الشكل المقابل: م جـ > م ب > م أ

إثبت أن

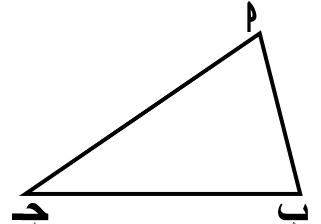
ق(∠ أ) > ق(∠ أجـ م) + ق(∠ أب م)



المقارنة بين أطوال الأضلاع فى مثلث

نظـــرية (٤) بالبرهان (صـ ٩٨)

إذا أختلف قياسا زاويتين من مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الضلع المقابل للزاوية الاخرى



المعطيات : Δ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) > ق(∠جـ)

المطلوب : إثبات أن : أجـ > أب

البرهان : البرهان (صـ ٩٨)

مثـــال فى الشكل : أب > أجـ ، ب ء ينصف ∠ أ ب جـ ، جـ ء ينصف ∠ أ جـ ء

إثبت أن : ء ب > ء جـ

الحـــــل

Δ أ ب جـ فيه أب > أجـ ∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) - - - (١)

ب ء ينصف ∠ أب جـ ∴ق(∠ ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب) - - - (٢)

جـ ء ينصف ∠أجـ ء ∴ق(∠ ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠جـ) - - (٣)

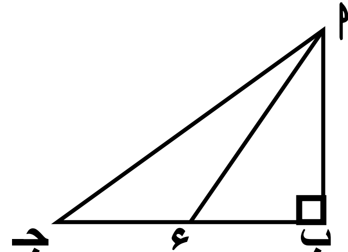
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠ ء جـ ب) > ق(∠ ء ب جـ) ∴ ء ب > ء جـ

نتيجة (١) فى المثلث القائم الزوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث

Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب ∴ ق(∠ب) > أى زاوية فى المثلث

مثـــال فى الشكل : Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ ب جـ إثبت أن: أجـ > أء



الحـــل

فى Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب

∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - - (١)

ق(∠أء جـ) > ق(∠ب) [خارجة عنΔ أب ء] - - - (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ∴ ق(∠ أء جـ) > ق(∠جـ)

فى Δ أ ء جـ ∴ أجـ > أء هـ . ط . ث

مثـــال فى الشكل: أب // ء و ، أجـ // هـ و ، إذا كان أجـ > أب برهن أن: و هـ > ء و

الحـــل

فى Δ أ ب جـ

أجـ > أب ∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - - (١)

أب // ء و ∴ ق(∠و ء هـ) = ق(∠ب) - - - (٢)

أجـ // و هـ ∴ ق(∠و هـ ء) = ق(∠جـ) - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن:

ق(∠و ء هـ) > ق(∠ و هـ ء) ∴ و هـ > و ء

مثـــال فى الشكل : أء ينصف ∠ ب أجـ ، ق(∠ب) = ٧٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°
إثبت أن: أ ء > ب ء

الحـــل

مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° – [٧٠° + ٣٠°] = ٨٠°

أء ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ق(∠ب أء) = ق(∠ء أجـ) = $\frac{٨٠°}{٢}$ = ٤٠°

Δ أ ب ء فيه ق(∠ب) > ق(∠ب أ ء) ∴ أ ء > ب ء

مثـــال : فى الشكل : أذا كان: ﻫ‍ // ب جـ إثبت أن أجـ > أب

الحـــل

أهـ // ب جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ ء أ هـ) = ٧٠° [بالتناظر]

، ق(∠جـ) = ق(∠هـ أ جـ) = ٣٠° [بالتبادل]

Δ أب جـ فيه ق(∠ب) > ق(∠جـ) ∴ أ جـ > أ ب

نتيجة (٢) طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة نقطة خارجة عن مستقيم معلوم إلى المستقيم أصغر من أى قطعة مستقيمة موسومة من هذة النقطة ألى المستقيم المعلوم

مثـــال فى الشكل : أ ب > أ جـ ، س ص // ب جـ ، س م ينصف ∠ أس ص ص م ينصف ∠ أص س برهن أن م س > م ص

الحـــــل

Δ أب جـ فيه أب > أجـ ∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) - - - (١)

س ص // ب جـ ∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ب) - - - (٢)

، ق(∠ أ ص س) = ق(∠جـ) - - - (٣)

من ١، ٢، ٣ ينتج أن

ق(∠ أ ص س) > ق(∠ أ س ص) - - - (٤)

س م ينصف ∠ أ س ص ∴ ق(∠م س ص) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ س ص) - - (٥)

ص م ينصف أ ص س ∴ ق(∠م ص س)= $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ ص س) - - (٦)

من ٤ ، ٥ ، ٦ ∴ق(∠ أ ص س) > ق(∠ أ س ص) ∴ س م > ص م

مثـــال فى الشكل : أء // ب جـ ، ق(∠ب أ جـ) =٨٠°، ق(∠ ء أ جـ) = ٤٠°

إثبت أن : ب جـ > أ جـ

الحـــــل

أء // ب جـ ∴ق(∠ أ جـ ب) = ∴ق(∠ ء أجـ) = ٤٠°

Δ أ ب جـ فيه

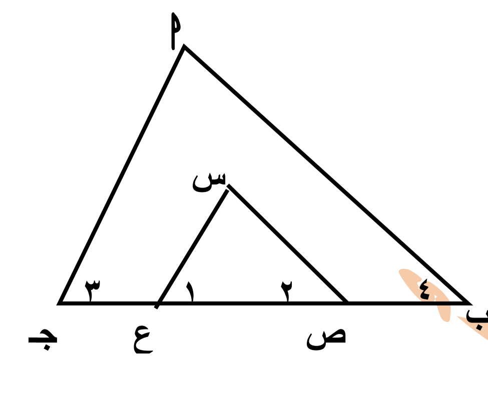
مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° – [٨٠° + ٤٠°] = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ب أ جـ) ∴ أ جـ > ب جـ

مثـــال فى الشكل : إذا كان أ جـ > أ ب إثبت أن أ جـ > أ ء

الحـــل



Δ أ ب جـ فيه أ جـ > أ ب ∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - (١)

ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠ب) [خارجة عن Δ أ ب ء] - (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠جـ) ∴ أ جـ > أ ء

مثـــال فى الشكل : س ص > س ع ، أ ب // س ص ، أ جـ // س ع ،

س ص > س ع إثبت أن: أ ب > أ جـ

الحـــل

Δ س ص ع فيه س ص > س ع ∴ ق(∠١) > ق(∠٢)- - (١)

أ ب // س ص ، ب جـ قاطع لهما

∴ ق(∠٢) = ق(∠٤) [بالتناظر] - - (٢)

أ جـ // س ع ، ب جـ قاطع لهما

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) [بالتناظر] - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

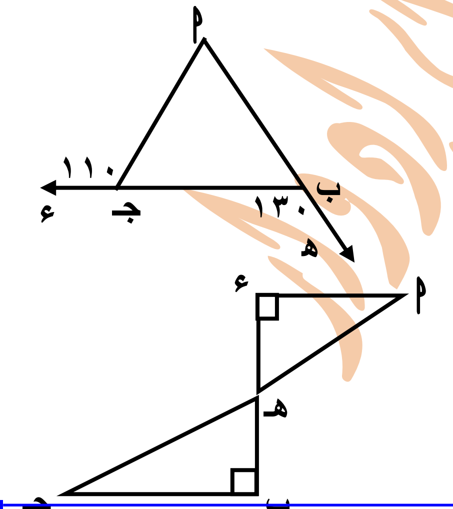
∴ ق(∠٣) > ق(∠٤) ∴ أ ب > أ جـ وهو المطلوب إثباته

تمارين

(١) فى الشكل المقابل

ق(∠هـ ب جـ) = ١١٠° ، ق(∠ أ جـ ء) = ١٣٠°

رتب أضلاع المثلث تصاعديا تبعا لاطوالها



(٢) فى الشكل المقابل

ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ء ب جـ) = ٩٠°

إثبت أن : م جـ > ب ء



(٣) فى الشكل المقابل س ص // ب جـ

ق(∠ب م س) = ٧٠° ، ق(∠جـ م ص) = ٥٧°

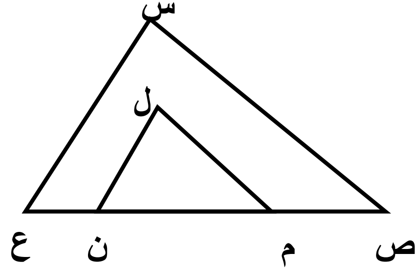
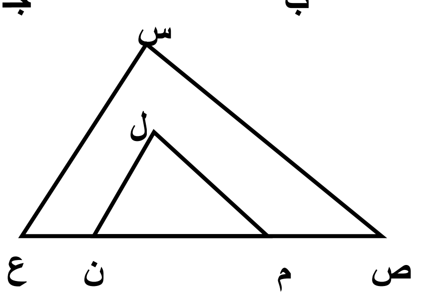
إثبت أن م جـ > م ب



(٤) فى الشكل المقابل س ص // ب جـ

ق(∠ص س جـ) = ١٣٠° ، ق(∠م ب جـ) = ٣٠°

إثبت أن: جـ ب > م ب

(٥) فى الشكل المقابل

س ص > س ع ، ل م // س ص

، ل ن // س ع إثبت أن : ل م > ل ن

(٦) م ب جـ ء شكل رباعى فيه م ء = جـ ء ، ق(∠ء) = ٥٠° ،

ق(∠م) =١١٠° ، ق(∠ب) = ٨٠° إثبت أن م ب > ب جـ

(٧) فى الشكل المقابل

م ب > م جـ ، جـ ء ينصف ∠م جـ ب

ب ء ينصف ∠م ب جـ إثبت أن ب ء > جـ ء

(٨) فى الشكل المقابل



م ء // ب جـ ، ق(∠ء م جـ) = ٣٥°

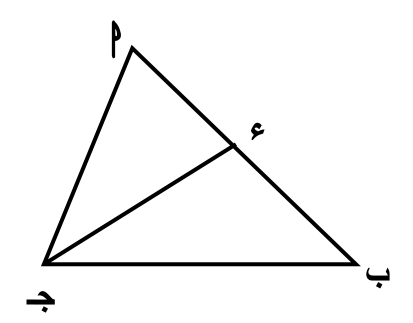
ق(∠ب م جـ) = ٧٥° إثبت أن : م جـ > م ب



(٩) فى الشكل المقابل

م ء = ء جـ ، ق(∠ب م ء) = ٣٢°

، ق(∠جـ) = ٥٤° إثبت أن : ء جـ > ء ب



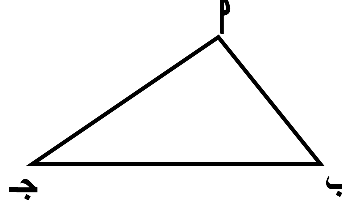
(١٠) فى الشكل المقابل

جـ ء ينصف ∠ ب جـ م ، ق(∠ب) =٤٠

ق(∠م) = ٦٠ إثبت أن ب ء > ء م

متباينة المثلث

- حقيقة: فى أى مثلث مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث
- طول أى ضلع فى مثلث أصغر من مجموع طولى الضلعين الاخرين وأكبر من الفرق بينهما



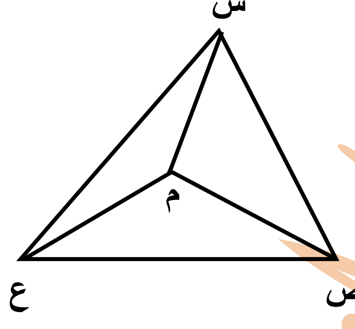
أى أن فى أى Δ م ب جـ م ب + م جـ > ب جـ

م ب + ب جـ > م جـ ، م جـ + ب جـ > م ب

مثـــال : فى الشكل المقابل إذا كان محيط س ص ع = ٥٠سم

إثبت أن : س م + ص م + ع م > ٢٥

الحــــــل



Δ س م ص فيه س م + م ص > س ص

Δ ص م ع فيه ص م + م ع > ص ع

Δ س م ع فيه س م + م ع > س ع بالجمع

س م+م ص + ص م + م ع + س م + م ع > س ص +ص ع + س ع

٢ س م + ٢ م ص + ٢ م ع > ٥٠ بقسمة الطرفين هلى ٢

س م + م ص + م ع > ٢٥

مثــال : بين أيا من الاطوال الاتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(أ) ٢ ، ٥ ، ٣ (ب) ٣ ، ٧ ، ٥ (حـ) ٧ ، ٣ ، ٢

الحـــل

(أ) مجموع ٢+٣ = ٥ وليس أكبر من ٥

الاطوال ٢، ٥، ٣ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(ب) الاطوال ٣ ، ٧ ، ٥ تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان مجموع أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

(حـ) الاطوال ٧ ، ٣ ، ٢ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان ٣+٢ = ٥ وهو أصغر من الضلع الثالث وليس أكبر

تدريب : أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

(١) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٢) الاطوال ٢ ، ٥ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٣) الاطوال ٣ ، ٦ ، ٢ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٤) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٥ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٥) الاطوال ٢ ، ٧ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٦) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٨ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٧) الاطوال ٥ ، ٦ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٨) الاطوال ٢ ، ٢ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

تدريب : أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١-مجموع طولى أى ضلعين من مثلث .... طول الضلع الثالث

[أصغر من – أكبر من – يساوى – نصف]

٢- طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع الضلعين الاخرين

[> أو < أو = أو ضعف]

٣- أى من الاضلاع الاتية لا تصلح لان تكون أضلاع مثلث
[٧ ، ٧ ، ٥ أو ٩ ، ٩ ، ٩ أو ٣ ، ٦ ، ١٢ أو ٣ ، ٤ ، ٥]

٤- إذا كان طولا ضلعين ٧ ، ٤ فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون
[١ سم ، ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم]

٥- إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣سم ، ٧سم فإن طول الضلع الثالث يساوى ....
[٧ سم أو ٣ سم ، ٤ سم ، ١٠ سم]

٦- مثلث له محور تماثل واحد ، طولا ضلعين فيه ٤ سم ، ٨ سم فإن محيطه = ...
[١٦ سم أو ٢٠ سم ، ٢٤ سم أو ٣٠ سم]